EQUAÇÃO DO TERCEIRO GRAU

Nova Lima, 05 de maio de 2026

ABSTRACT

Este estudo aborda as equações polinomiais do terceiro grau (equações cúbicas) na forma geral $AX^3 + BX^2 + CX + D = 0$, destacando métodos clássicos de resolução e propondo uma parâmetro auxiliar para análise da distribuição das raízes. São revisados procedimentos tradicionais, como a fatoração e a aplicação das Relações de Viète, que estabelecem vínculos diretos entre os coeficientes dos polinômio e a soma dos produtos das raízes.

Adicionalmente, introduz-se um parâmetro denominado K (Delta), definindo em função das diferenças reais $P<Q<R$, dado por:

$$K = (R - P)^2 - (R - Q) (Q - P)$$

$$K = (B^2 - 3 A C)/ A^2$$

Aplicando em equações cúbicas específicas indicam que o coeficiente K pode atuar como uma medida auxiliar do espaçamento entre as raízes, contribuindo para a análise de sua distribuição. Contudo, o parâmetro não determina diretamente as soluções da equação, sendo necessário o uso de métodos algébricos tradicionais para a resolução completa.

Conclui-se que, embora métodos clássicos permaneçam fundamentais, a introdução de parâmetros auxiliares como K pode oferecer novas perspectivas na análise estrutural das raízes. Recomenda-se a realização de estudos adicionais para investigar a aplicabilidade geral do coeficiente, sua invariância e sua possível relação com invariantes algébricos já estabelecidos, como o discriminante cúbico.

Palavras-Chave

Equações cúbicas; raízes de polinômios. Relações de Viète ; invariante algébricos; distribuição de raízes.

CÁLCULO

$X^3 - 6x^2 + 11x – 6 = 0$

$K = (B^2 - 3AC)/A^2$

$K = (-6)^2 - 3*1*11 = 36 – 33 = 3$

$K = 3$

Número interior Natural que possui raiz quadrada perfeita, com número natural, maior do que K.

Raiz quadrada de K = 1,732050808

O número inteiro natural maior do que K é 2 (dois).

$2^2 = 4$; onde $4 > k$

2 = SR = Somatória das raízes.

$2^2 = 4$

$(SR)^2 - K = PR$

PR = PRODUTO DAS RAÍZES

4 – 3 = 1

PR = 1

SR = 2

X^2 - SRX + PR = 0

$X^2 - 2X + 1 = 0$

DELTA = $B^2 - 4AC = 4 - 4 = 0$

DELTA = 0

RAÍZES = [(-B) +/- RAÍZ QUADRADA DE DELTA]/ 2

RAÍZES = (2 +/- 0)/2 = 1

VOLTANDO A EQUAÇÃO:

$X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = 0$

SOLUÇÕES = P, Q, R

(Q – P) = 1

(R – Q) = 1

$P + 1 = Q$

$Q + 1 = R$

$P + 2 = R$

$(-B) = 6 = (P + P + 1 + P + 2) = 3P + 3$

$3P + 3 = 6$

$3P = 3$

$P = 1$

$P = 1$

$Q = 2$

$R = 3$

SOLUÇÕES DE X:

$X1 = 1$

$X2 = 2$

$X3 = 3$

RESOLVER A EQUAÇÃO:

$X^3 - 7X^2 + 14X - 8 = 0$

$K = (B^2 - 3AC)/A^2$

$K = 49 – 42 = 7$

$K = 7$

$7 < 9$

RAIZ QUADRADA DE 9 = 3

$SR = 3$

$(SR)^2 - K = PR$

$9 – 7 = 2$

$PR = 2$

$SR = 3$

$X^2 - 3X + 2 = 0$

DELTA = 9 – 8 = 1

RAÍZES = (3 +/- RAIZ DE DELTA)/2

RAÍZES = 4/2 = 2; e, 2/2 = 1

RAÍZES = 1 e 2

VOLTANDO A EQUAÇÃO

$X^3 - 7X^2 +14X – 8 = 0$

$P + 1 = Q$

$Q + 2 = R$

$P + 3 = R$

$(-B) = 7 = P + P + 1 + P + 3 = 3P + 4$

$3P + 4 = 7$

$3P = 7 – 4$

$3P = 3$

$P = 1$

$P = 1$

$Q = 2$

$R = 4$

A EQUAÇÃO APRESENTA SOLUÇÕES PARA X, SENDO:

$X1 = 1$

$X2 = 2$

$X3 = 4$

RESOLVER A EQUAÇÃO:

$X^3 - 12X^2 + 44X – 48 = 0$

$K = (B^2 - 3AC)/A^2$

$K = 144 – 3*1*44 = 144 – 132 = 12$

$12 < 16$

$16 = (SR)^2$

$SR = 4$

$(SR)^2 - K = PR$

$16 – 12 = 4$

$PR = 4$

$SR = 4$

$X^2 - SRX + PR = 0$

$X^2 - 4X + 4 = 0$

DELTA + 16 – 16 = 0

RAIZ = (-B +/- RAIZ QUADRADA DE DELTA)/2

RAIZ = (4 +/- 0)/2 = 2

RAIZ = 2

VOLTANDO À EQUAÇÃO:

$X^3 -12X^2 + 44X – 48 = 0$

$P + 2 = Q$

$Q + 2 = R$

$P + 4 = R$

$P + p + 2 + P + 4 = (- B) = 12$

$3P + 6 = 12$

$3P = 6$

$P = 2$

$P = 2$

$Q = 4$

$R = 6$

A EQUAÇÃO $X^3 - 12X^2 + 44X – 48 = 0$ POSSUI SOLUÇÕES X:

$X1 = 2$

$X2 = 4$

$X3 = 6$

RESOLVER A EUAÇÃO:

$X^3 - 9X^2 +23X – 15 = 0$

$K = (B^2 - 3AC)/A^2$

K = 81 – 3*1*23 = 81 – 69 = 12

K = 12

12 < 16 (QUADRADO PERFEITO MAIS PRÓXIMO)

$16 = (SR)^2$

SR = 4

$(SR)^2 - K = PR$

16 – 12 = 4

PR = 4

SR = 4

RAÍZES = 2

P+ 2 = Q

Q+ 2 = R

P + 4 = R

(- B) = 9 = P + P + 2 + P + 4 = 3P + 6

3P + 6 = 9

3P = 3

P = 1

$P = 1$

$Q = 3$

$R = 5$

A EQUAÇÃO APRESENTA SOLUÇÕES X:

$X1 = 1$

$X2 = 3$

$X3 = 5$

RESOLVER A EQUAÇÃO:

$X^3 - 13X^2 + 39X – 27 = 0$

$K = (B^2 - 3AC)/A^2$

$K = 169 – 117 = 52$

$52 < 64$ (QUADRADO PERFEITO MAIS PRÓXIMO)

$(SR)^2 = 64$

$SR = 8$

$(SR)^2 - K = PR$

$64 – 52 = 12$

$PR = 12$

$SR = 8$

$X^2 - SRX + PR = 0$

$X^2 - 8X + 12 = 0$

DELTA = 64 – 48 = 16

RAÍZES = (8 +/- 4)/2

RAIZ 1 = 12/2 = 6

RAIZ 2 = 4/2 = 2

VOLTANDO A EQUAÇÃO:

$X^3 - 13X^2 + 39X - 27 = 0$

$P + 2 = Q$

$Q + 6 = R$

$P + 8 = R$

$P + P + 2 + P + 8 = 3P + 10 = (- B) = 13$

$3P + 10 =13$

$3P = 3$

$P = 1$

$Q = 3$

$R = 9$

A EQUAÇÃO APRESENTA AS SEGUINTES SOLUÇÕES:

$X1 = 1$

$X2 = 3$

$X3 = 9$

RESOLVER A EQUAÇÃO:

$X^3 - 9X^2 + 23X – 15 = 0$

$K = (B^2 - 3AC)/A^2$

$K = 81 – 69 = 12$

$12 < 16$ (QUADRADO PERFEITO MAIS PRÓXIMO)

$(SR)^2 = 16$

$SR = 4$

$(SR)^2 - K = PR$

$16 – 12 = 4$

$PR = 4$

$SR = 4$

RAÍZ = 2

P + 2 = Q

Q + 2 = R

P + 4 = R

(-B) = 9 = P + P + 2 + p + 4 = 3P + 6

3P + 6 = 9

3P = 3

P = 1

Q = 3

R = 5

A EQUAÇÃO APRESENTA SOLUÇÕES PARA X:

X1 = 1

X2 = 3

X3 = 5

RESOLVER A EQUAÇÃO:

$X^3 - 16X^2 + 79X - 120 = 0$

K = 256 – 237 = 19

K = 19

19 < 25 (QUADRADO PERFEITO MAIS PRÓXIMO)

$(SR)^2 = 25$

$SR = 5$

$(SR)^2 - K = PR$

$25 – 19 = 6$

$PR = 6$

RAÍZES: 2 e 3

$P + 2 = Q$

$Q + 3 = R$

$P + 5 = R$

$P + P + 2 + P + 5 = 3P + 7$

$(-B) = 16 = 3P + 7$

$3P + 7 = 16$

$3P = 9$

$P = 3$

$Q = 5$

$R = 8$

A EQUAÇÃO APRESENTA SOLUÇÕES PARA X, SENDO:

$X1 = 3$

$X2 = 5$

$X3 = 8$

RESOLVER A EQUAÇÃO:

$64X^3 - 56X^2 + 14X – 1 = 0$

$K = (B^2 - 3AC)/A^2$

$K = (3136 – 3*64*14)/4096$

$K = (3136 – 2688)/4096$

$K = 448/4096 = 7/64$

$7/64 < 9/64$ (QUADRADO PERFEITO MAIOR QUE 7/64)

$(SR)^2 = 9/64$

$SR = 3/8$

$(SR)^2 - K = PR$

$9/64 – 7/64 = 2/64$

$PR = 2/64$

$X^2 - SRX + PR = 0$

$X^2 - 3/8X + 2/64 = 0$

$DELTA = (B^2 - 4AC) = 9/64 – 4*1*2/64 = 9/64 – 8/64 = 1/64$

$RAIZ = (3/8 +/- 1/8)/ 2$

$RAIZ\ 1 = 4/16 = 1/4$

$RAIZ\ 2 = 2/16 = 1/8$

$P - 1/4 = Q$

$Q - 2/16 = R$

$P - 6/16 = R$

$P + P - 4/16 + P - 6/16 = 3P - 10/16$

$(-B/A) = 56/64 = 7/8$

$3P - 10/16 = 14/16$

$3P = 14/16 + 10/16 = 24/16$

$3P = 24/16$

$P = 8/16 = 1/2$

$P = 1/2$

$P – 1/4 = Q$

$1/2 – 1/4 = 2/4 – 1/4 = 1/4 = Q$

$Q = 1/4$

$P – 6/16 = R$

$1/2 - 6/16 = 8/16 – 6/16 = 2/16 = 1/8 = R$

$R = 1/8$

$P = 1/2$

$Q = 1/4$

$R = 1/8$

AS EQUAÇÃO POSSUI VALORES PARA X, SENDO:

$X1 = 1/2$

$X2 = 1/4$

$X3 = 1/8$

RESOLVER A EQUAÇÃO:

$24X^3 - 26X^2 + 9X – 1 = 0$

$K = (B^2 - 3AC)/A^2$

$K = (676 – 3*24*9)/576$

$K = (676 – 648)/576$

$K = 28/576 = 7/144$

$K = 7/144$

$7/144 < 9/144$ (QUADRADO PERFEITO MAIS PRÓXIMO)

$(SR)^2 = 9/144$

$SR = 3/12 = 1/4$

$(SR)^2 - K = PR$

$9/144 – 7/144 = 2/144$

$PR = 2/144$

$X^2 - SRX + PR = 0$

$X^2 - 3/12X + 2/144 = 0$

DELTA = 9/144 – 4*2/144 = 9/144 – 8/144 = 1/144

RAIZ = (3/12 +/- 1/12)/2

RAIZ 1 = 4/24 = 1/6

RAIZ 2 = 2/24 = 1/12

RAIZ 1 + RAIZ 2 = 2;12 + 1/12 = 3/12

P – 2/12 = Q

Q – 1/12 = R

P – 3/12 = R

P + P – 2/12 + P - 3/12 = 3P - 5/12

(- B/A) = 26/24 = 13/12

3P - 5/12 = 13/12

$3P - 5/12 = 13/12$

$3P = 18/12$

$P = 6/12 = 1/2$

$P = 1/2$

$P – 2/12 = Q$

$1/2 - 2/12 = Q$

$6/12 – 2/12 = Q$

$4/12 = Q$

$Q = 4/12 = 1/3$

$P – 3/12 = R$

$1/2 - 3/12 = R$

$6/12 – 3/12 = R$

$3/12 = R$

$R = 1/4$

$P = 1/2$

$Q = 1/3$

$R = 1/4$

AS SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO É:

$X1 = 1/2$

$X2 = 1/3$

$X3 = 1/4$

RESOLVER A EQUAÇÃO:

$24X^3 - 46X^2 + 29X – 6 = 0$

$K = (B^2 - 3AC)/A^2$

K = (2116 – 3*24*29)/576

K = (2116 – 2088)/576

K = 28/576 = 7/144

7/144 < 9/144 (QUADRADO PERFEITO MAIS PRÓXIMO)

$(SR)^2 = 9/144$

SR = 3/12

$(SR)^2 - K = PR$

9/144 – 7/144 = 2/144

PR = 2/144

RAIZ 1 = 2/12

RAIZ 2 = 1/12

P + P + 2/12 + P + 3/12 = 3P + 5/12

(-B/A) = 46/24 = 23/12

$3P + 5/12 = 23/12$

$3P = 18/12$

$P = 6/12$

$P = 1/2$

$P + 2/12 = Q$

$6/12 + 2/12 = 8/12 = 2/3 = Q$

$Q = 2/3$

$P + 3/12 = R$

$6/12 + 3/12 = 9/12 = 3/4 = R$

$R = 3/4$

$P = 1/2$

$Q = 2/3$

$R = 3/4$

A EQUAÇÃO APRESENTA SOLUÇÕES, SENDO:

$X1 = 1/2$

$X2 = 2/3$

$X3 = 3/4$

MASSA TESTE

$1/2 + 2/3 + 3/4 = 6/12 + 8/12 + 9/12 = 23/12$

A EQUAÇÃO

$24X^3 - 46X^2 + 29X - 6 = 0$

Massa Teste = 23/12 = -B/A = 46/24 = 23/12

1/2 * 2/3 * 3/4 = 6/24 = - D/A

Verifica-se que 1/2, 2/3, 3/4 são soluções da equação:

$24X^3 - 46X^2 + 29X - 6 = 0$

RESOLVER A EQUAÇÃO:

$X^3 = 0$

K = 0

NOTA: QUANDO $K = (B^2 - 3AC)/A^2 = 0$ = SIMBOLIZA TRÊS SOLUÇÕES REAIS E IGUAIS.

RESOLVER A EQUAÇÃO:

$X^3 - 7X^2 + 10X = 0$

K = 49 – 30 = 19

K = 19

$19 < 25$ (QUADRADO PERFEITO MAIS PRÓXIMO)

$(SR)^2 = 25$

$SR = 5$

$(SR)^2 - K = PR$

$25 - 19 = 6$

$PR = 6$

QUANTO SOMADO É 5 (CINCO); e, MULTIPLICADO É 6 (SEIS)?

RESPOSTA: RAÍZES 2 e 3

$(- B) = 7$

$P + P + 2 + P + 5 = 3P + 7$

$3P + 7 = 7 = (- B)$

$3P = 0$

$P = 0$

$P + 2 = 0 + 2 = 2 = Q$

$Q = 2$

$P + 5 = 0 + 5 = 5 = R$

$R = 5$

SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO:

$X1 = 0$

$X2 = 2$

$X3 = 5$

EQUAÇÃO IRRACIONAL

(X – RAIZ DE 2) (X – RAIZ DE 3) (X – RAIZ DE 7) = 0

PARA FICAR MAIS FÁCIL DE DEMONSTRAR QUE A EQUAÇÃO SE APLICA PARA EQUAÇÕES IRRACIONAIS, UTILIZAREMOS OS SEGUINTES EXEMPLOS:

(X – RAIZ DE 4) (X – RAIZ DE 9) (X – RAIZ DE 16) = 0

SERIA COMO ENCONTAR DELTA, OU VALOR “K” ENTRE 2,3,4

$P = 2$

$Q = 3$

$R = 4$

$Q – P = 3 – 2 = 1$

$R – Q = 4 – 3 = 1$

$[(Q – P) + (R – Q)]^2 = (1 + 1)^2 = 2^2 = 4$

$[(Q – P) * (R – Q)] = (1*1) = 1$

$[(Q – P) + (R – Q)]^2 - [(Q – P) * (R – Q)] = 4 – 1 = 3$

DELTA = K = 3

K = RAIZ DE 9

A EQUAÇÃO:

(X = RAIZ DE 4) (X – RAIZ DE 9) (X – RAIZ DE 16) = 0

K = 3

3 < 4 = (QUADRADO PERFEITO MAIS PRÓXIMO)

$(SR)^2 = 4$

$(SR)^2 - K = PR$

4 – 3 = 1

PR = 1

PR = RAIZ DE 1

RAÍZES = 1

P + P + 1 + P + 2 = 3P + 3 = -B/A

(RAIZ DE 4) + (RAIZ DE 9) + (RAIZ DE 16) = 9

$3P + 3 = 9$

$3P = 6$

$P = 2$

$Q = 3$

$R = 4$

NOTA: ESTE RACIOCÍNIO DEMONSTRA QUE A EQUAÇÃO CALCULA AS RAÍZES (X), ONDE (X) É UM VALOR IRRACIONAL.

NÚMEROS INTEIROS NEGATIVOS

$(X + 1) (X + 2) (X + 3) = 0$

A EQUAÇÃO:

$X^3 + 6X^2 + 11X + 6 = 0$

$K = 36 - 33 = 3$

$K = 3$

$3 < 4$ (QUADRADO PERFEITO MAIS PRÓXIMO)

$(SR)^2 = 4$

$SR = +/- 2$

$(SR)^2 - K = PR$

$4 – 3 = 1$

$PR = 1$

RAÍZES = 1

$P + P + 1 + P + 2 = 3P + 3$

$(-B/A) = -6$

$3P + 3 = -6$

$3P = -9$

$P = -3$

$P + 1 = -3 + 1 = -2 = Q$

$Q = -2$

$P + 2 = -3 + 2 = -1 = R$

$R = -1$

AS SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO É:

$X1 = -3$

$X2 = -2$

$X3 = -3$

EQUAÇÃO VARIANTE

A equação variante é que pelo modo de ver, não encontramos solução, onde alteramos o valor de “D” nas equação: $AX^3 + BX^2 + CX + D = 0$.

EXEMPLO:

$X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = 0$

$(X - 1)(X - 2)(X - 3) = 0$

AS SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO É:

$X1 = 1$

$X2 = 2$

$X3 = 3$

Agora iremos alterar o valor de “D”, ou seja:

$$X^3 - 6X^2 + 11X - 7 = 0$$

Esta equação é uma equação variante, porque as soluções que são 1,2,3 tem a soma 6 (seis), correspondo com B. Possui K = 3, onde K é fornecido por:

$$K = (B^2 - 3AC)/A^2$$

Mas o produtos entre 1*2*3 = 6, diferente de “D”, onde “D” é igual a 7 (sete).

AJUSTE DO QUADRADO PERFEITO MAIS PRÓXIMO DE K

Nem sempre o quadrado perfeito que segue após o valor de K, seja aquele que simboliza $(SR)^2$

Para testarmos se o quadrado perfeito imediatamente após o valor de K, seja o que a equação precisa, é preciso de um teste, se caso afirmativo, adotamos este quadrado perfeito, mas se caso negativo, buscamos o verdadeiro quadrado perfeito.

Data a equação:

$$(X - 2) (X - 6) (X - 11) = 0$$

RAÍZES = 4 e 5

SR = 9

PR = 20

A EQUAÇÃO É DADA POR:

$X^3 - 19X^2 + 100X – 132 = 0$

$K = (B^2 - 3AC)/A^2$

$K = (361 – 3*1*100)/1 = 361 – 300 = 61$

K = 61

61 < 64 (QUADRADO PERFEITO MAIS PRÓXIMO)

$(SR)^2 - K = PR$

64 – 61 = 3

SR = 8

PR = 3

TESTE DOS VALORES ENCONTRADOS

$X^2 - SRX + PR = 0$

$X^2 - 8X + 3 = 0$

DELTA = 64 – 12 = 52 (NÃO É QUADRADO PERFEITO)

CONCLUSÃO:

DEVEMOS APLICAR O K POSTERIOR A 64 = 81

61 < 64 < 81 (QUADRADO PERFEITO)

$81 = (SR)^2$

SR = 9

$(SR)^2 - K = PR$

81 – 61 = 20

SR = 9

PR = 20

TESTANDO OS VALORES ENCONTRADOS

$X^2 - SRX + PR = 0$

$X^2 - 9X + 20 = 0$

DELTA = 81 – 80 = 1

RAÍZES = (- B +/- RAIZ DE DELTA)/2

RAÍZES = (9 +/- 1)/2

RAIZ 1 = 5

RAIZ 2 = 4

P + P + 4 + P + 9 = 3P + 13 = (-B/A) = 19

$3P + 13 = 19$

$3P = 6$

$P = 2$

$P = 2$

$P + 4 = Q$

$2 + 4 = 6$

$Q = 6$

$P + 9 = R$

$2 + 9 = 1$

$R = 11$

$P = 2$

$Q = 6$

$R = 11$

A EQUAÇÃO $X^3 - 19X^2 + 100X – 132 = 0$, POSSUI SOLUÇÕES:

$X1 = 2$

$X2 = 6$

$X3 = 11$

CONCLUSÃO: APLICAÇÃO DO TESTE DE VERIFICAÇÃO DOS RESULTADOS PARA SR e PR.

Sendo só, subscrevo-me,

Mui-atenciosamente,

RONALDO JOSÉ DE SOUZA

BIOGRAFIA

MATEMÁTICA (PRIMEIRA, SEGUNDA, E TERCEIRA SÉRIE)

SEGUNDO GRAU

AUTORES: GLSON IEZZI

OSVALDO DOLCE

JOSÉ CARLOS TEIXEIRA

NILSON JOSÉ MACHADO

MÁRCIO CINTRA GOULART

LUIZ ROBERTO DA SILVEIRA CASTRO

ANTÔNIO DOS SANTOS MACHADO

EDITORA: ATUAL EDITORA LTDA – 1995

ESTE ARTIGO FOI PRODUZIDO COM AJUDA DA INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL, (ABSTRACT).