FAVENI

FACULDADE VENDA NOVA DO IMIGRANTE

TÓPICOS EM MATEMÁTICA

WELLINGTON MAIA

MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO POR DERIVAÇÃO E POR LAGRANGE

RIO DE JANEIRO

(2021)

MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO POR DERIVAÇÃO E POR LAGRANGE

Declaro que sou autor (a) deste Trabalho de Conclusão de Curso. Declaro também que o mesmo foi por mim elaborado e integralmente redigido, não tendo sido copiado ou extraído, seja parcial ou integralmente, de forma ilícita de nenhuma fonte além daquelas públicas consultadas e corretamente referenciadas ao longo do trabalho ou daqueles cujos dados resultaram de investigações empíricas por mim realizadas para fins de produção deste trabalho. Assim, declaro, demonstrando minha plena consciência dos seus efeitos civis, penais e administrativos, e assumindo total responsabilidade caso se configure o crime de violação aos direitos autorais.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar a utilização das derivadas e do método de Lagrange nos problemas de otimização. Inicialmente faremos uma breve abordagem histórica sobre o conceito de derivadas no calculo diferencial e integral, posteriormente faremos uma abordagem dos problemas de otimização, muito usado nas áreas de economia e engenharia.

Palavras-chave: Derivadas. Método de Lagrange. Problemas de Otimização. Cálculo diferencial e integral.

INTRODUÇÃO

A derivada é uma poderosa ferramenta de cálculo diferencial e integral que utilizaremos na abordagem dos problemas de otimização. Sua aplicação é de fácil manejo, quando respeitadas algumas etapas para elaboração sequencial dos problemas de otimização. O uso do método de Lagrange será utilizado também na elaboração destes problemas, porém onde há funções com restrições, como veremos brevemente.

O estudo de otimização é um tema de grande importância, tendo em vista a sua aplicabilidade em diversas áreas. Os problemas de otimização são muito úteis na economia de custos visando maior aproveitamento em um determinado produto. Podemos minimizar o custo do material gasto de uma embalagem de forma que nela caiba maior quantidade possível. Outro exemplo, com um material disponível para fazer uma cerca podemos aproveitar melhor à área a ser cercada. Desta forma podemos fazer estes cálculos através da derivada de uma função juntamente com a ideia dos números críticos.

1. A DERIVADA

1.1 ASPECTOS HISTÓRICOS

O conceito de derivada surgiu em meados dos séculos XVII e XVIII relacionados ao estudo de problemas de física mais especificadamente ligados ao estudo dos movimentos. Neste período destacaram-se o físico e matemático inglês Isaac Newton (1642 - 1727), o filósofo e matemático alemão Gottifried Leibniz (1646 - 1716) e o matemático francês Joseph Luís Lagrange (1736-1813).

As ideias inicialmente introduzidas na física foram aos poucos sendo incorporadas a outras áreas do conhecimento, como na Economia e a Engenharia. Assim o conceito de derivadas é utilizado, entre outras situações, no estudo gráfico das funções, determinação de máximas e mínimas e cálculo de taxa de variação de funções.

O estudo da derivada esta presente no currículo de diversos cursos superiores, nas disciplinas dos cursos de cálculo diferencial e Integral, por possuir aplicações em várias áreas do conhecimento.

1.2 CONCEITO DE DERIVADA

É uma ferramenta utilizada para calcular grandezas que variam em determinados fenômenos físicos, como a velocidade de um foguete, a inflação de uma moeda, o numero de bactérias de uma cultura, a intensidade do tremor de um terremoto, etc.

Inicialmente veremos a definição matemática da derivada de uma função em um ponto:

Definição: Se uma função f é definida em um intervalo aberto contendo x_o, então a derivada de f em x_o,denotada por f ' (x_o), é dada por:

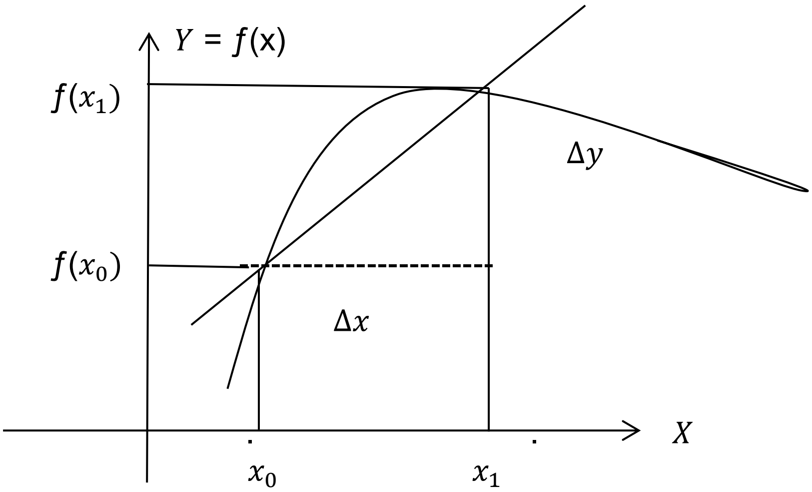
$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

se este limite existir.Δx representa uma pequena variação em x, próximo de x_0, ou seja, tomando x = x_0+Δx $(\Delta x = x - x_0)$, a derivada de f em x_0 pode também ser expressa por

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Notações: $f'(x_{0,}), \frac{\boldsymbol{df}}{dx} \; x = x_0 \; \frac{df}{dx}$

Interpretação física: A derivada de uma função f em um ponto x_0 fornece taxa de variação instantânea de f em x_0. Vejamos como isso ocorre:
Suponha que y seja uma função de x, ou seja, $y = f(x)$. Se x variar de um valor de x_0 até um valor x_1, representearemos esta variação de x, que também é chamada de incremento de x, por $\Delta x = x_1 - x_0$, e a variação de y é dada por $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$, o que é ilustrado na figura a seguir:



O quociente das diferenças, dado por $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, é dito taxa de variação média de y em relação de x. no intervalo $[x_0, x_1]$.O limite destas taxas médias de variação, quando $\Delta x \to 0$, é chamado de taxa de variação instantânea de y em relação a x , em $x = x_0$. Assim temos:
Taxa de variação instantânea = $\mathbf{lim}_{\boldsymbol{x_1 \to x_0}} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ = $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
Porém, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$.
Portanto, a taxa de variação instantânea de uma função em um ponto é dada pela sua derivada neste ponto.

1.3 MÁXIMOS E MÍNIMOS

▪Extremos de uma função;
▪Máximos e mínimos de uma função;
Definindo função crescente e decrescente

Definição 1: Uma função é crescente num ponto x_0, se existe um intervalo aberto I contendo x_0 tal que $f(x) < f(x_0)$, para x em I á esquerda de x_0, e $f(x_0), < f(x)$, para x em I á direita de x_0.

Definição 2: Uma função é decrescente num ponto x_0, se existe um intervalo aberto I contendo x_0 tal que $f(x) > f(x_0)$, para x em I à esquerda de x_0, e $f(x_0) > f(x)$, para x em I á direita de x_0.

Teorema 1: Uma função f é crescente em um intervalo I, se para quaisquer x_1e x_2 em I, x_1< x_2 temos $f(x_1)$> $f(x_2)$ para todo par dos números x_1e x_2.

Teorema 2 – Teste da primeira derivada num intervalo aberto.

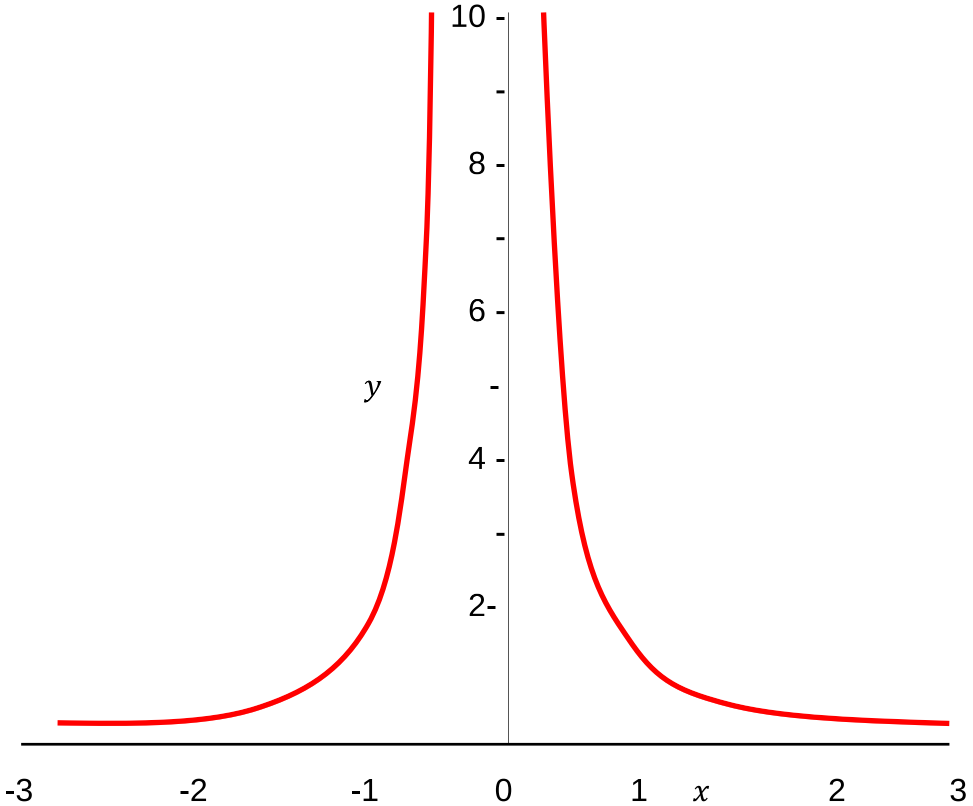
Se a derivada $f(x)$ existe e é positiva para todo x em um intervalo aberto, então, a função é crescente neste intervalo aberto, então neste intervalo a função é decrescente.

Exemplo: determinar onde a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ é crescente e onde ela é decrescente.

Solução: $f(x) = -\frac{2}{x^3}$

A derivada é negativa para x > 0 e positiva para x < 0.

Portanto, a função f (x) = $\frac{1}{x^2}$ é decrescente no intervalo x>0 e crescente no intervalo x < 0.



Definindo Máximos e Mínimos Relativos

Definição: Uma função f tem máximo relativo em x_0, se $f(x) \leq f(x_0)$ para todo x em um intervalo aberto contendo x_0. A função tem um mínimo relativo em x_0,se $f(x) \geq f(x_0)$ para todo x em um intervalo aberto contendo x_0.

Definindo Ponto Crítico

Definição: O ponto x_0 é um ponto crítico de uma função f, se f é definida em um intervalo aberto contendo x_0 e $f'(x_0)$ é zero ou não existe.

Se o gráfico de uma função tem uma reta tangente num ponto crítico, então, a reta tangente é horizontal. De acordo com o próximo resultado, máximos e mínimos relativos de uma função só podem ocorrer em pontos críticos.

Teorema: Se f tem um máximo ou mínimo relativo em x_0,então, x_0 é um ponto crítico de f.

MÁXIMO ABSOLUTO

Consideremos uma função f definida no intervalo I, e suponha um ponto c pertencente a esse intervalo]: C$\in$ I .

Se, $\forall\, x \in$ I, então dizemos que, no intervalo I, a função f atinge o seu valor máximo absoluto $f(c)$ no ponto c.

MÍNIMO ABSOLUTO

Consideremos uma função f definida no intervalo I, e suponha um ponto c pertencente a esse intervalo l: C$\in$ I

Se, $\forall\, x \in$ I, então dizemos que, no intervalo I, a função f atinge o seu valor mínimo absoluto $f(c)$ no ponto c.

Critérios para determinar os Extremos de uma função

Teorema (Teste da derivada primeira). Seja f uma função contínua num intervalo fechado [a, b], que possui derivada em todo ponto do intervalo aberto (a, b), exceto possivelmente num ponto c.

i) Se f'(x) > 0 para todo x < c e f' (x) < 0 para todo x > C, então f tem um máximo relativo em c.

ii) Se f'(x) < 0 para todo x <c e f' (x) > 0 para todo x > C, então f tem um mínimo relativo em c.

Exemplo: Encontre os intervalos de crescimento, decrescimento, máximos e mínimos relativos da função f(x) = x³-7x + 6.

Solução: f'(x) = 3x² - 7. Fazendo f'(x) = 0, obtemos $x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$.

Portanto, os pontos cítricos de f são $x_1 = +\sqrt{\frac{7}{3}}$ e $x_2 - \sqrt{\frac{7}{3}}$.

É fácil verificar que se $x < -\sqrt{\frac{7}{3}}$ ou $x > \sqrt{\frac{7}{3}}$,o que implica que f é crescente nos intervalos $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{3}}\ \right)$ e $\left(\sqrt{\frac{7}{3}}, \infty\right)$. Para $-\sqrt{\frac{7}{3}} < x < \sqrt{\frac{7}{3}}$, tem-se f' (x) < 0,

logo f é decrescente em $\left(-\sqrt{\frac{7}{3}}, \sqrt{\frac{7}{3}}\right)$. Assim, pelo critério da derivada primeira,

concluímos que f tem um máximo relativo em $x_1 = -\sqrt{\frac{7}{3}}$. e um mínimo relativo em $x_2 = +\sqrt{\frac{7}{3}}$

Teorema - (Teste da derivada segunda). Sejam f uma função derivável num intervalo (a, b) e c um ponto crítico de f neste intervalo, isto é, f'(c) = 0, com
a < c < b. Se f admite a derivada segunda em (a, b) então:

i) Se f "(c) < 0. f tem um valor máximo relativo em c.

ii) Se f "(c) > 0, f tem um valor mínimo relativo em c.

Exemplos: Encontre os máximos e mínimos relativos de f, aplicando o teste da derivada segunda.

1) $f(x) = 18x + 3x^2 - 4x^3$.

Temos, $f'(x) = 18 + 6x - 12x^2$ e $f''(x) = 6 - 24x$.

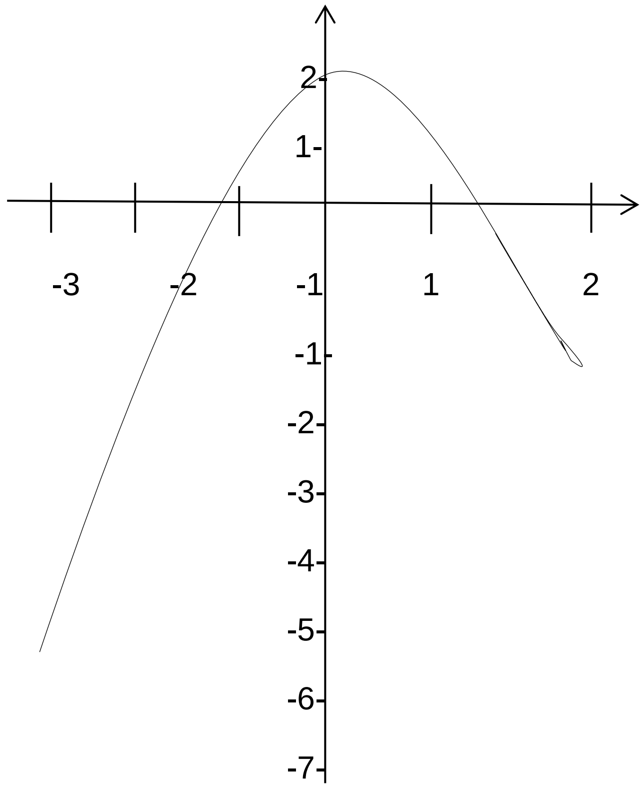
Fazendo $f'(x) = 0$, obtemos $18 + 6x - 12x^2 = 0$. Resolvendo esta equação obtemos os pontos críticos de f, que são $x_1 = \frac{3}{2}$ e $x_2 = -1$.

Como $f''\left(\frac{3}{2}\right)$ = -30 < 0, segue que $x_1 = \frac{3}{2}$ é um ponto de máximo relativo de f. Seu valor máximo relativo em x_1 é dado por $f\left(\frac{3}{2}\right)$ = 20,25.

Analogamente, como f” (-1) = 30 > 0, segue que $x_2 = -1$ é um ponto de mínimo relativo de f. Seu valor mínimo relativo em x_2 é dado por $f(-1) = -11$.

É importante observar que uma função definida em um dado intervalo pode admitir diversos extremos relativos. O maior valor da função neste intervalo é chamado máximo absoluto e o menor valor mínimo absoluto.

Exemplo: A função $f(x) = -x^2 + 2$ possui um valor máximo absoluto igual a 2 em (-3, 2), o qual é atingido quando $\mathrm{x} = 0$. Também podemos dizer que -7 é o valor mínimo absoluto em [-3, 2], o qual é atingido por $\mathrm{x} = -3$.



2. Método dos Multiplicadores por Lagrange

Inicialmente vamos considerar os seguintes problemas:

(1) Maximizar f(x,y) = 4 – x^2 - y^2

(2) Maximizar f(x,y) = 4 - x^2 - y^2

Sujeito a: x + y = 2

Observem que o problema (1) pode ser resolvido através dos teoremas estudados. Esse é um problema de otimização irrestrita.

Agora o problema (2) apresenta uma restrição que deve ser considerada na resolução. Temos então um problema de otimização restrita.

No problema (2) queremos encontrar o maior valor da função num subconjunto de seu domínio.

O subconjunto do plano xy dado pela reta x + y = 2.

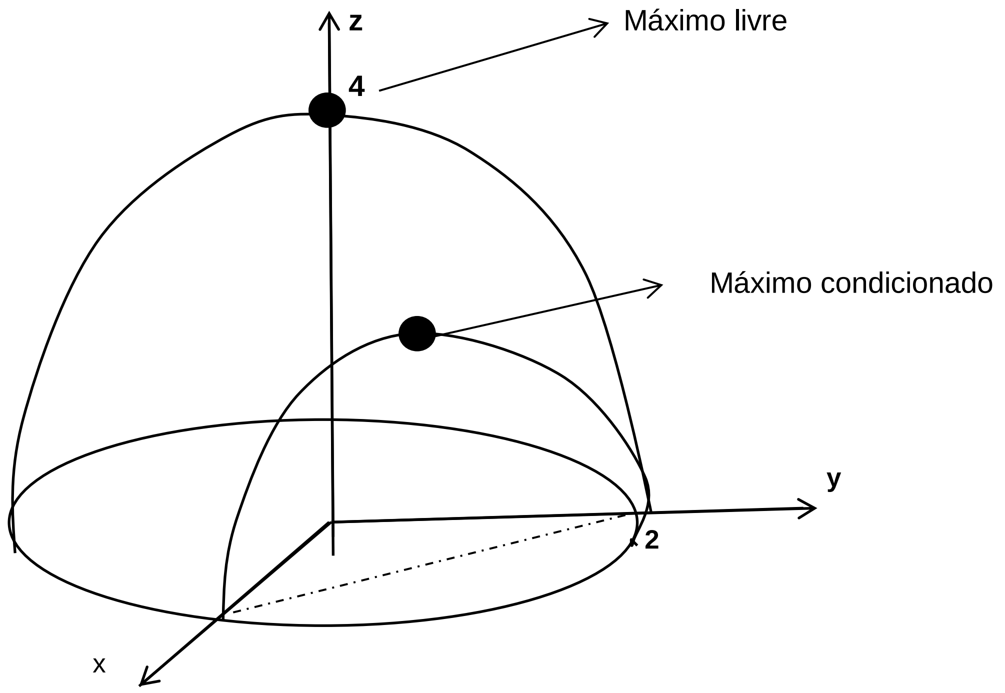
Em outras palavras:

Queremos encontrar os pontos extremos de uma função f(x,y) na fronteira da região D do plano xy.

Isso consiste em procurar os extremos da função f(x,y) para (x,y) sobre uma curva no plano xy da equação g(x,y) é chamada de restrição.

A solução do problema (1) é chamada um ponto de máximo livre ou não-condicionado de f.

A solução do problema (2) é dita um ponto de máximo condicionado de f.



Teorema

Sejam f(x,y) e g(x,y) sejam funções definidas e de classe C1 num subconjunto aberto U do plano xy que contém a curva C de equação g(x,y)=0.

Se f(x,y) tem um valor máximo ou mínimo em $(x_0, y_0) \in$ C e $\nabla g(x_0, y_0)$ não é o vetor nulo, então existe um número real λ tal que $\nabla f(x_0, y_0) = λ\ \nabla g(x_0, y_0)$. Chamamos o numero λ de multiplicador de Lagrange.

Em outras palavras:

Se f(x,y) possui máximo ou mínimo com a restrição g(x,y) 0 , esse máximo ou mínimo ocorre em um dos pontos críticos da função F dada por

$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$

Como foi dito anteriormente λ (lambda) é chamada de multiplicador de Lagrange. No caso de uma função de três variáveis, a função F é dada por

$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$

Observação

O método dos multiplicadores de Lagrange permite determinar os pontos críticos de uma função, mas não revela se esses pontos correspondem a máximos, mínimos ou a ponto de sela. Para identificar o ponto crítico é preciso recorrer a outros métodos.

Problemas envolvendo funções de duas variáveis e uma restrição

Consideremos o seguinte problema:

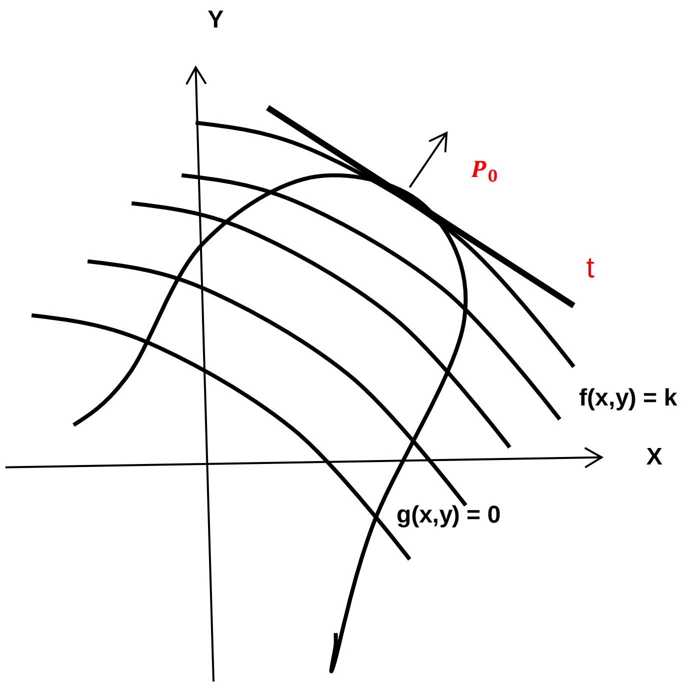
Max $f(x, y)$

Sujeito a: $g(x, y) = 0$

Agora vamos usar as propriedades do vetor gradiente para obtermos uma visualização geométrica do método de Lagrange, que nos permite determinar os candidatos a ponto de máximo e/ou mínimo condicionados de f.

Vamos esboçar o gráfico da $g(x, y) = 0$ e diversas curvas de nível $f(x, y) = k$ da função objetivo.

O valor máximo de $f(x, y)$ sobre a curva $g(x, y) = 0$ coincide com o maior valor de k tal que a curva $f(x, y) = k$ intercepta a curva $g(x, y) = 0$. Note que isso ocorre num ponto P0. Nesse ponto, as duas curvas têm a mesma reta tangente t.



Como grad f e grad g são perpendiculares à reta t, eles têm a mesma direção no ponto P0 , isto é,

grad f = λ grad g

Para algum número real λ.

3. CONCLUSÃO

3.1 Métodos de Otimização por derivação e por Lagrange.

3.2 Problemas de Otimização com aplicação da derivada.

Os problemas de aplicações da derivada que envolve máximos e mínimos, taxas de variação e cálculo de limites estão presentes nos mais diversos campos, como geometria, engenharia, física, biologia e economia e têm em suas estruturas variáveis como área, volume, força, potência, tempo, lucro, custo, etc.

Exemplo 1: Qual o retângulo de perímetro igual a 12 cm que tem área máxima?

Solução:

Seja w a largura e L o comprimento do retângulo, ambos medidos em centímetros.

Devemos maximizar a área A. O perímetro P já está fixado. Temos A = w.L e

P = 2w + 2L

Se escolhermos w como a varável independente temos:

P = 2w + 2L = 12

L = 6 - w

A = w. (6 – w) = 6w- w^2

Como a largura não pode ser negativa e não pode ser maior que a metade do perímetro, de modo que w deve estar no intervalo $0 \leq w \leq 6$.

A função área A (w) = 6w – w^2 é continua no intervalo $0 \leq w \leq 6$.

A função derivada A' (w) = 6 - 2w existe para todo w e é zero em w = 3. O único ponto crítico da função A(w) é w = 3. Encontrando A(0) = 0, A(3) = 9 e A(6) = 0.

O valor máximo é 9 e ocorre em w = 3. O retângulo de maior área é um quadrado.

Exemplo 2. (Problema retirado do livro: Cálculo A, Fleming e Buss).

Determinar o ponto P situado sobre o gráfico da hipérbole $1 = xy$ que esta mais próximo da origem.

Vamos considerar um ponto P(x, y) sobre a hipérbole e a distância d deste ponto até a origem. Temos:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Mas y = $\frac{1}{x}$

$$d = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^2}}$$

Para achar o mínimo de d podemos minimizar a função

$$f = \frac{x^4 + 1}{x^2}$$

$$f = \frac{2x^4 - 2}{x^3}$$

$f = 0$ implica

$$\frac{2x^4 - 2}{x^3} = 0$$

$$2x^4 - 2 = 0$$

$x = \pm 1$ é ponto crítico. Portanto P (x,y) = P(1,1) ou P (-1,-1)

Exemplo 3:

Uma companhia gasta, anualmente, 600 unidades de certo artigo. De cada vez, sai a R$1200 um pedido de substituição do artigo. Se a companhia faz um pedido x vezes por ano, a estocagem e outros custos de transporte saem a 180000/x reais por ano. Quantas vezes por ano deve a companhia fazer o pedido, para minimizar o pedido total e o custo de transporte?

Solução:

Se a companhia faz um pedido x vezes por ano, o custo do pedido é de 1200x e 180000/x para custo de transporte. O custo total é:

$$C(x) = 1200x + \frac{180000}{x}$$

Desejamos o valor mínimo dessa função para inteiros positivos x. Consideremos a função C(x) como definida para todo x > 0.

Sua derivada é:

$$C'(x) = 1200 - \frac{180000}{x^2}$$

$$C'(x) = \frac{1200\ (x^2 - 150)}{x^2}$$

$C'(x) \ = \ 0\ para\ x \ = \sqrt{150}$

$C'(x) < \ 0\ para\ 0 < x < \sqrt{150}$

$C'(x) > \ 0\ para\ x > \sqrt{150}$

Como $12 \ < \sqrt{150} \ < 13\ e\ C\ 12 < C\ 13$

O pedido deve ser feito 12 vezes por ano.

Exemplo 4:

Mostre que, entre todos os retângulos de mesmo perímetro, o quadrado é o de área máxima.

Solução:

Sendo o retângulo R de dimensões x e y, seu perímetro é $P \ = \ 2x + 2y$ e a área da sua região é $A \ = \ x.y$

Assim

$$P \ = \ 2x + 2y$$

$$y = \frac{p - 2x}{2}$$

$$A = xy = x.\frac{p - 2x}{2}$$

$$A(x) = -x^2 + \frac{px}{2}$$

$$A'(x) = -2x^2 + \frac{p}{2}$$

$$A'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{p}{4}$$

$$A``(x) = -2$$

Como a segunda derivada é negativa para todo x.

Podemos afirmar que $x \ = \frac{p}{4}$ é o ponto máximo de A(x) ou seja, a área será máxima quando

$$\frac{p}{4} = \frac{2x + 2y}{4} = \frac{x + y}{2}$$

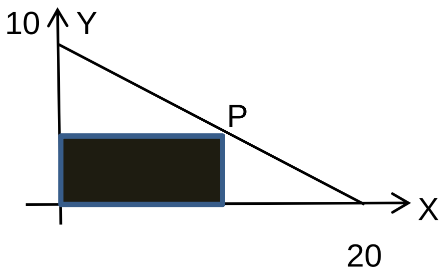
Que é o lado do quadrado de mesmo perímetro que o retângulo R.

3.3 Problemas de otimização com aplicação do método de Lagrange

Exemplo 1

Um prédio retangular deve ser construído num terreno com a forma de um triangulo, conforme a figura abaixo.

Vamos analisar o problema num sistema de coordenadas cartesianas.



Podemos observar que a área do prédio é dada por $A\,(x, y) = x.y$ e o ponto $\mathrm{P}(x, y)$ deve estar sobre a reta $x + 2y = 20$. Então podemos descrever o seguinte problema:

Max xy

Sujeito a : $x + 2y = 20$.

Agora vamos utilizar os métodos dos multiplicadores de Lagrange para resolvermos este problema.

Vamos começar descrevendo a restrição $x + 2y = 20$ da seguinte forma:

$x + 2y - 20 = 0$

A função lagrangeana é dada por $L(x, y, \lambda) = xy - \lambda\,(x + 2y - 20)$

Derivando L em relação ás três variáveis $x, y\ e\ \lambda$, encontraremos:

$$L(x, y, \lambda) = xy - \lambda\,(x + 2y - 20)$$

$\frac{dL}{dx} = y - \lambda$

$\frac{dL}{dy} = x - 2\lambda$

$\frac{dL}{d\lambda} = -x - 2y + 20$

$$\begin{cases} y - \lambda = 0 \\ x - 2\lambda = 0 \\ -x - 2y + 20 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontraremos $x = 10, y = 5\ e\ \lambda = 5$

Observe que as dimensões do prédio que fornece um valor máximo para a sua área são $x = 10$ e $y = 5$. Portanto, a área do prédio $A(x, y) = x.y$ será

$A = 10\,.\,5 = 50\,m^2$.

Observe que este raciocínio é o mesmo se fizéssemos da seguinte forma:

$\nabla f(x_0, y_0) - \lambda\,\nabla g(x_0, y_0) = 0$

$\nabla f(x_0, y_0) = (y, x)$

$\nabla g(x_0, y_0) = (1,2)$

$y - \lambda = 0$
$x - 2\lambda = 0$
$-x - 2y + 20 = 0$

Resolvendo este sistema encontramos $x = 10, y = 5$ e λ =5.

Exemplo 2

Determine o ponto do plano $2x + y + 3z = 6$ mais próximo a origem.

A função que determina a distancia é definida por $d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Portanto, podemos minimizar $x^2 + y^2 + z^2$ do plano a origem.

Podemos escrever esse problema da seguinte forma:

Min $x^2 + y^2 + z^2$

Sujeito a : $2x + y + 3z = 6$

Vamos começar escrevendo a restrição $2x + y + 3z = 6$ da seguinte forma: $2x + y + 3z - 6 = 0$.

A função lagrangeana é dada por $L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 = \lambda\,(2x + y + 3z - 6)$

Derivando L em relação ás variáveis x, y, z e λ, encontraremos:

$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda\,(2x + y + 3z - 6)$

$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda 2x + \lambda y + 3\lambda z + 6$

$\frac{dL}{dx} = 2x - 2\lambda$

$\frac{dL}{dy} = 2y - 2\lambda$ e $\frac{dL}{dz} = 3z - 3\lambda$

$\frac{dL}{d\lambda} = -2x - y - 3z + 6$

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda = 0 \\ 2y - \lambda = 0 \\ 3z - 3\lambda = 0 \\ 2x + y + 3z - 6 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontraremos:

$x = 6/7, y = 3/7, z = 9/7\ e\ \lambda = 6/7$

Este é o ponto de mínimo.

EXEMPLO 4

O departamento de estradas está planejando construir uma área de laser para motoristas ao longo de um grande auto estrada. Ela deve ser retangular, com uma área de 5.000 m² e cercada nos três lados não adjacentes à auto estrada.

Qual é a quantidade mínima de cerca que será necessária para realizar o trabalho?

Seja y o lado em vermelho e x o lado em azul.

Quantidade total de cerca: $f(x, y) = x + 2y$

Objetivo:

Minimizar f sujeita à restrição de que a área deve ser de 5.000 m² , ou seja, xy = 5000.

Seja $g(x, y) = xy$.

As derivadas parciais: fx = 1, fy = 2, gx = y e gy = x

Equações de Lagrange: 1 = λy , 2 = λx, e xy = 5000

Resolvendo encontramos

$\lambda = \frac{1}{y}$

$$\frac{1}{y} = \frac{2}{x} \Longrightarrow x = 2y$$

$\lambda = \frac{2}{x}$

$x, y \neq 0$

Substituindo x = 2y em xy = 5000 teremos 2y² = 5000, ou seja, y1 = 50 e Y2 = -50.

Portanto y = 50 e x = 100 e a quantidade mínima de cerca que será necessária para realizar o trabalho será f(100,50) = 200 m

EXEMPLO 5

Determine a menor distância da origem a superfície x² + 8xy + 7y² - 225 = 0.

A função que determina a distância é definida por

$$d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Portanto, podemos minimizar $x^2 + y^2$ com a restrição x² + 8xy + 7y² - 225 = 0.

Aplicaremos de forma mais direta o método dos multiplicadores de Lagrange.

$\nabla f(X_0, Y_0) - \lambda \nabla g(x_0, y_0) = 0$

$\nabla f(x, y) = (2x + 8y, 8x + 14y)$

$\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$

$L(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda\,(x^2 + 8xy + 7y^2 - 225) = 0$

Aplicando Lagrange encontramos:

$$2x - \lambda(2x + 8y) = 0$$

$$2y = \lambda(8x + 14y) = 0$$
$$-X^2 - 8xy - 7y^2 + 225 = 0$$

$$2x - \lambda 2x - \lambda 8y = 0$$
$$2y - \lambda 8x - \lambda 14y = O$$
$$-x^2 - 8xy - 7y^2 + 225 = 0$$

Simplificando as duas primeiras equações encontraremos o seguinte sistema:

$(1 - \lambda)x - 4y\lambda = 0$

$-4y\lambda + (1 - 7\lambda)y = 0$

Resolvendo este sistema:

Determinamos x = 0 e y = 0 como solução trivial, pois é um sistema homogêneo. Porém, esta solução não satisfaz a terceira equação ($-x^2 - 8xy - 7y^2 + 225 = 0$)

Portanto, o determinante dos coeficientes deve ser nulo.

Resolvendo este determinante encontramos

$(1 - \lambda)(1 - 7\lambda) - 16\lambda^2 = 1 - 8\lambda - 9\lambda^2 \Rightarrow \lambda = -1$ ou $\lambda = 1/9$

Agora é necessário analisar o sistema considerando $\lambda = -1$e $\lambda = 1/9$.

Após essa análise chegaremos a conclusão que o sistema apresentará as seguintes soluções:

$$(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})\ e\ (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$$

Aplicando os pontos em f(x,y) = 25 veremos que a menor distância será

$$d(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{25} = 5$$

RESUMINDO

Método dos multiplicadores de lagrange

$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$.

Se $f(x,y)$ possui máximo ou minimo com a restrição $g(x,y) = 0$, esse máximo ou minimo ocorre em um dos pontos críticos da função F dada por

$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen, -. **Cálculo**: Tradução de Claus Ivo Doering. Vol. 1. 10.ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Miriam Buss. **Cálculo A: Funções, limite, derivação e integração.** 6 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

ROGAWSKI, Jon; ADAMS, Colin. **Cálculo**. Tradução Claus Ivo Doering. vol. 1. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2018.

STEWART, James. **Cálculo**. vol. 1. 5. ed. São Paulo, SP: Pioneira Thomson Learning, 2006.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. Tradução de Kleber Roberto Pedroso e Regina Célia Simille de Macedo. Revisão técnica de Cláudio Hirofume Asano. vol. 1. 12 ed. São Paulo, SP: Pearson, 2012.